

KOLOKWIUM Z ALGEBRY II – 2023

(Za każde zadanie można zdobyć od 0 do 20 punktów)

1. Zbadaj, czy $i \in \mathbb{Q}(\xi_3)$, gdzie $\xi_3 = e^{2\pi i/3}$.
2. Niech $\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\alpha)$, gdzie $\alpha \in \mathbb{C}$ jest jednym z pierwiastków wielomianu $X^5 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Wykaż, że wielomian $X^3 + 2X + 2$ jest nierozkładalny w pierścieniu $\mathbb{F}[X]$.
3. Wyznacz ciało rozkładu \mathbb{E} wielomianu $g = 7X^4 - 2023 \in \mathbb{Q}[X]$. Ile podciał ma ciało \mathbb{E} ?
4. Niech \mathbb{E} będzie ciałem rozkładu wielomianu $X^{2023} + X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$. Wykaż, że w grupie $\text{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{Q})$ istnieje element rzędu 2.
5. Z lematu Kuratowskiego-Zorna wynika, że istnieje maksymalne podciało $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ niezawierające liczby $\sqrt{2}$. Wykaż, że rozszerzenie $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ jest algebraiczne.